**Задачи по функциональному анализу.**

**(2019-2020 уч. год)**

1. Какова мощность всех непрерывных функций на ?
2. Доказать, что подмножество  такое, что  - замкнутое в .
3. Является ли множество  - непрерывных функций, удовлетворяющих условию  открытым в ?
4. Доказать, что пространство  - ограниченных последовательностей с метрикой является полным пространством.
5. Пусть  - отображение -мерного пространства в себя, задаваемое с системой линейных уравнений  или . В пространстве введена метрика двумя способами: а) , и б) , где , .

Доказать, что условие  является необходимым и достаточным, чтобы отображение являлось сжатием.

1. Доказать, что любое измеримое множество  на прямой с мерой  содержит измеримое подмножество меры .
2. Пусть - измеримое на сегменте  для любого интервала  имеет место неравенство . Доказать, что .
3. Пусть  и  - измеримые подмножества сегмента  и . Доказать, что .
4. Может ли открытое неограниченное множество иметь конечную меру?
5. Пусть замкнутое множество имеет конечную меру. Может ли оно быть неограниченным?
6. Доказать, что непрерывные функции на  эквивалентны тогда и только тогда, когда они равны.
7. Доказать, что непрерывные на измеримом множестве  функции являются измеримыми.
8. Доказать, что если имеет производную на сегменте , то производная измерима.
9. Привести пример ограниченной, измеримой функции, не эквивалентной никакой функции, интегрируемой по Риману.
10. Привести пример неизмеримой функции. Доказать, что множество и его характеристическая функция измеримы или не измеримы одновременно.
11. Будет ли измерима функция на ?
12. Будет ли измерима функция
13. Пусть - неизмеримое множество на интервале . Будет ли функция измеримой?
14. Привести пример ограниченной функции, разрывной в каждой точке отрезка и интегрируемой по Лебегу. Будет ли эта функция интегрируема по Риману?
15. Привести пример функции, интегрируемой по Лебегу на , но не являющейся ограниченной ни на каком отрезке .
16. При каких и функция интегрируема по Лебегу на .
17. Доказать, что если на множестве и , то функция удовлетворяет неравенству Чебышева
18. Существует ли интеграл Лебега от на ?
19. Будет ли функция интегрируемы по Лебегу на , если
20. При каких и существует интеграл Лебега на , от функции .
21. Существует ли интеграл Лебега на от функции
22. Привести пример последовательности функций, сходящейся по мере на измеримом , но не сходящейся ни в одной точке множества .
23. Показать, что из сходимости почти всюду не следует сходимости в среднем. Рассмотреть пример:
24. Показать, что из сходимости в среднем не следует сходимости почти всюду. Пример: для любого определим
25. Показать, что из сходимости по мере не следует сходимости почти всюду. Рассмотрите пример задачи 29.
26. Показать, что из сходимости по мере не следует сходимости в среднем. Пример: при
27. Показать, что если мера множества бесконечна, то из сходимости почти всюду не следует сходимость по мере. Пример:
28. Показать, что из сходимости в не следует сходимости в . Пример:
29. Доказать полноту пространства .
30. Будет ли полным пространство многочленов на сегменте , если метрика вводится по формуле:
31. Доказать, что пространство - сепарабельно.
32. Пусть - компактное множество в банаховом пространстве . Доказать, что для любого найдется точка такая, что
33. Если на метрическом компакте для любых , принадлежащих компакту, то оператор имеет единственную неподвижную точку. Существенно ли условие компактности?
34. Доказать множество непрерывно дифференцируемых на функций таких, что где - постоянные, компактно в пространстве
35. Будет ли компактом множество всех степеней в пространстве
36. Доказать, что не всякое ограниченное множество в метрическом пространстве компактно.
37. Доказать, что в конечномерном пространстве всякое ограниченное множество компактно.
38. Доказать, что следующие функционалы в пространстве являются линейными и непрерывными и найти их нормы:

 .

1. Пусть - множество функций , определенных на всей вещественной прямой, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного интервала. Введем норму, полагая . Будет ли пространство банаховым?